2/11/2015

Όρια και συνέχεια συναρτήσεων περισσότερων μεταβλητών

Συναρτήσεις περισσότερων μεταβλητών

$U \subset \mathbb{R}^n$ $\quad \bar{x} \mapsto \bar{f}(x) \in \mathbb{R}^m$, $n, m \in \mathbb{N}$, όχι απαραίτητα ίδιοι.

$\Rightarrow$ (Ταξινόμηση): $m=1$ πραγματικές συναρτήσεις n μεταβλητών (δηλ. $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$)

$m \geq 2$ διανυσματικές συναρτήσεις n ανεξ. μεταβλητών, όπου:

$f(\bar{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\bar{x}) \\ \vdots \\ f_n(\bar{x}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$, όπου $f_i : U \to \mathbb{R}$ λέγονται συνιστώσες συναρτήσεις της $\bar{f}$ $\quad i = 1, \dots, m$

Ειδική περίπτωση: $n = m \geq 2$: $\bar{f} : U \to \mathbb{R}^n$ λέγεται διανυσματικό πεδίο

π.χ.

$n = m = 2$, $\bar{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\bar{f}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x,y)^T = (x,y)$

(η οποία είναι η ταυτοτική συνάρτηση του $\mathbb{R}^2$).

δεν κάνουμε διαφορά, αλλά προσοχή στον κανόνα της αλυσίδας

π.χ. Επίσης $\bar{f} : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}^3$

$\bar{f}(x,y,z) = -c \dfrac{(x,y,z)}{\|(x,y,z)\|^3}$, με $\|\bar{f}(x,y,z)\| = c \dfrac{1}{\|(x,y,z)\|^2}$

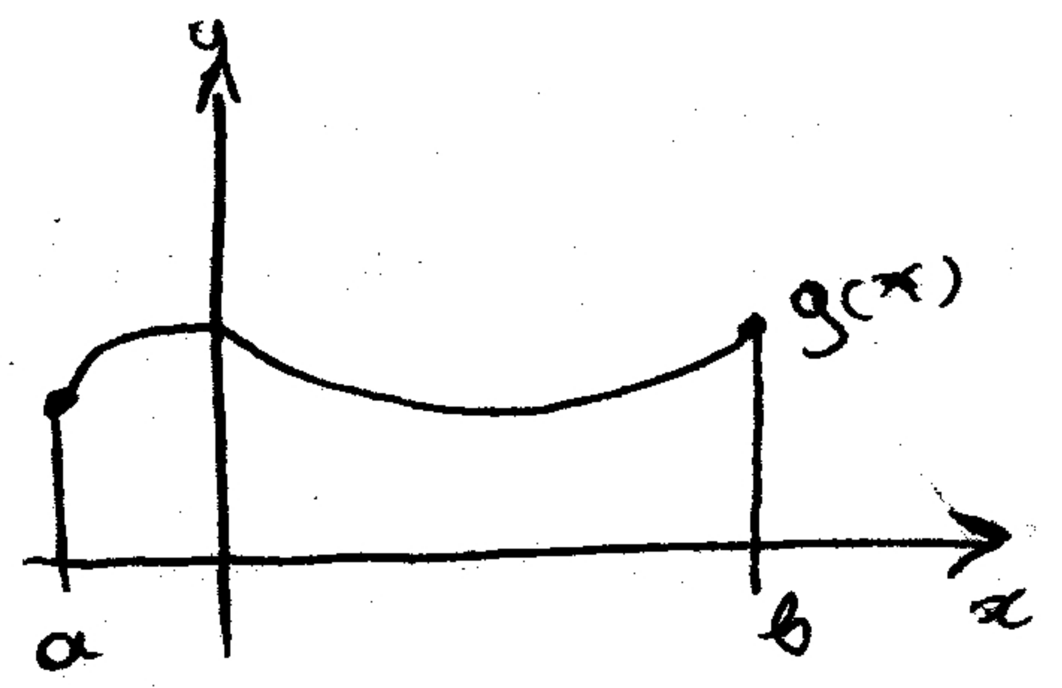
• Το διανυσματικό πεδίο $\bar{f}(x,y,z) = -c \dfrac{(x,y,z)}{\|(x,y,z)\|}$ είναι το πεδίο βαρύτητας (δηλαδή το $\bar{f}(x,y,z)$ είναι η δύναμη που εξασκείται σε ένα σώμα μάζας m, που βρίσκεται στο σημείο (x,y,z), από ένα σημείο μάζας 1 στο σημείο $(0,0,0)$. (όπου $c = Gm$), G βαρυτική σταθερά.

* Ειδική περίπτωση επίσης, διανυσματικής συνάρτησης:
$n = 1$, $m \geq 2$: $\bar{f} : U \to \mathbb{R}^m$, $U \in \mathbb{R}$, όπου όταν $U = I$ διάστημα και η f είναι συνεχής (δηλαδή f_i συνεχείς, όταν $\bar{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$). Τότε ονομάζονται καμπύλες στον $\mathbb{R}^m$.

π.χ.

Αν $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής, η απεικόνιση $\underset{\in[a,b]}{x} \longmapsto \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ g(x) \end{pmatrix}}_{= (x, g(x)) = \bar{f}(x)} \in \mathbb{R}^2$

είναι μια καμπύλη στον $\mathbb{R}^2$.



Προσοχή στις καμπύλες στον $\mathbb{R}$: Όπως είδαμε, εμείς ορίσαμε ως καμπύλη στον $\mathbb{R}^n$ μια απεικόνιση $\bar{\gamma} : I \to \mathbb{R}^n$, όπου I διάστημα

$\bar{\gamma} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} I \to \mathbb{R}^2$: συνεχής $\Leftrightarrow$ βλ. αργότερα $\begin{cases} \gamma_1 : I \to \mathbb{R} \\ \gamma_2 : I \to \mathbb{R} \end{cases}$ συνεχείς!

Η «καμπύλη» όπως την καταλαβαίνουμε διαισθητικά είναι η εικόνα της καμπύλης, δηλ. $\bar{\gamma}(I) \subset \mathbb{R}^2$)

π.χ. Στο παράδειγμα $\bar{\gamma} : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, με $\bar{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} t \\ g(t) \end{pmatrix}$, όπου $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής, η εικόνα της καμπύλης $\bar{\gamma}([a,b]) = \{ \bar{\gamma}(t) = (t, g(t)) : t \in [a,b] \} = \Gamma_g$,

είναι το γράφημα της g.

Συγκρατούμε: Θα ασχοληθούμε κυρίως με 4. Ειδικές περιπτώσεις συναρτήσεων:

① $f : U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$, πραγματικές συναρτήσεις n-μεταβλητών.

② $\bar{f} : U \to \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$, διανυσματικό πεδίο στον $\mathbb{R}^n$

③ $\bar{\gamma} : I \to \mathbb{R}^n$, $I \subset \mathbb{R}$ διάστημα, $\forall$ $\bar{\gamma}$ συνεχής καμπύλη στον $\mathbb{R}^m$.

④ $\bar{\Phi} : U \to \mathbb{R}^3$, $U \subset \mathbb{R}^2$, με κάποιες ιδιότητες του U και της $\bar{\Phi}$, επιφάνειες στον $\mathbb{R}^3$.

Τα ②, ③, ④ είναι ειδικές περιπτώσεις διανυσματικών συναρτήσεων

$\bar{f} : U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$, $\bar{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$, όπου $f_i : U \to \mathbb{R}$ πραγματικές, με: $i = 1, \dots, m$

Πραγματικές συναρτήσεις n μεταβλητών

U πεδίο ορισμού, $\mathbb{R}$ πεδίο τιμών, $f(\bar{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ $\xrightarrow[\text{στο } \bar{x}]{\text{τιμή της } f}$

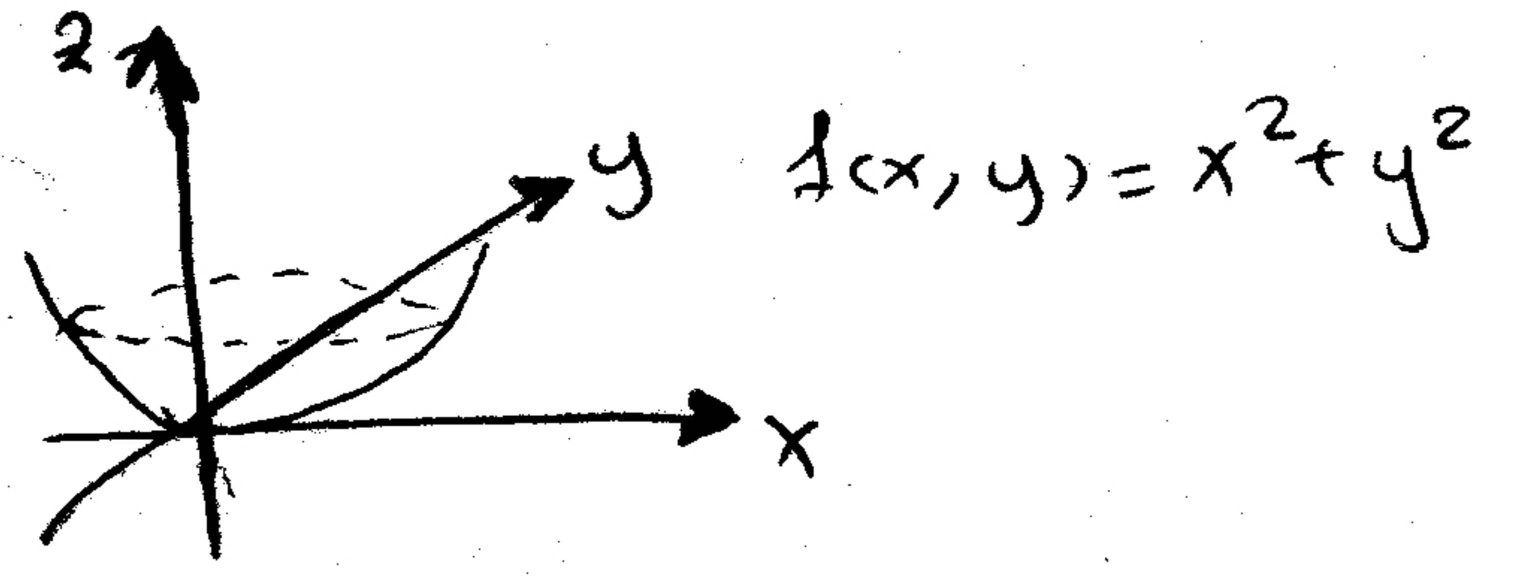
$\rightarrow f(U) = \{ f(\bar{x}) \in \mathbb{R} : x \in U \}$

και $\Gamma_f = \{(\bar{x}, f(\bar{x})) : \bar{x} \in U\}$ γράφημα της f.

Παράδειγμα:

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + y^2$ συνάρτηση ελλειπτικού παραβολοειδούς

Πεδίο ορισμού $\mathbb{R}^2$, πεδίο τιμών $\mathbb{R}$, εικόνα: $f(\mathbb{R}^2) = [0, \infty)$



Μια σημαντική νέα έννοια, η οποία υπάρχει στις πραγματικές και όχι τόσο στις διανυσματικές συναρτήσεις, και ούτε στις πραγματικές μιας μεταβλητής, είναι η έννοια του συνόλου στάθμης c της f.

$L_f(c) = \{ \bar{x} \in U : f(\bar{x}) = c \}$, $c \in \mathbb{R}$

Π.χ. Στο παράδειγμα $f(x,y) = x^2 + y^2$, είναι:

$L_f(c) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = c \}$

Όρια πραγματικών συναρτήσεων

Ορισμός: $U \subset \mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$, $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, σημείο συσσώρευσης του U (δηλαδή $\exists (\bar{x}_\nu) \subset U : \bar{x}_\nu \to \bar{x}_0$) και $l \in \mathbb{R}$. Τότε λέμε ότι το $l \in \mathbb{R}$ είναι όριο της f στο σημείο $\bar{x}_0$, αν:

$\forall (\bar{x}_\nu) \subset U, \bar{x}_\nu \to \bar{x}_0 : f(\bar{x}_\nu) \to l$ και το συμβολίζουμε αυτό ή γράφοντας $f(\bar{x}) \to l$, όταν $\bar{x} \to \bar{x}_0$ ή (αφού αποδεικνύεται ότι το όριο, αν υπάρχει, είναι μοναδικό)

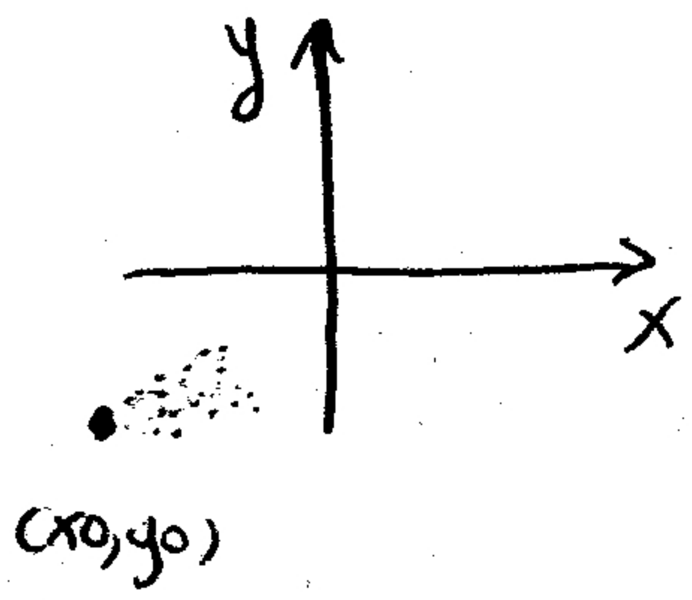
$$l = \lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} f(\bar{x})$$

Παράδειγμα

(Άσκηση)

Έστω η $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\begin{cases}1, & x,y\geq 0\\ 0, & \text{αλλιώς}\end{cases}$

Εξετάστε σε ποια σημεία $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$, η f έχει όριο και αν έχει, ποιο είναι αυτό;



Λύση:

① Για σημεία $(x_0,y_0)\in(0,\infty)\times(0,\infty)$, έχουμε ότι:

$\exists \varepsilon>0 : B((x_0,y_0))\subset(0,\infty)\times(0,\infty)$

π.χ.
αν επιλέξουμε, ως $\varepsilon=\min\{x_0,y_0\}$, έχουμε:

$\forall (x,y)\in B((x_0,y_0),\varepsilon)$ $\quad \|(x,y)-(x_0,y_0)\| = (x-x_0)^2+(y-y_0)^2 < \varepsilon^2 \leq x_0^2, y_0^2$

και θέλουμε να δείξουμε ότι:

$x>0, y>0.$

$\Rightarrow (x-x_0)^2<x_0^2, (y-y_0)^2<y_0^2 \Rightarrow |x-x_0|<x_0, |y-y_0|<y_0$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} -x_0<x-x_0<x_0 \\ -y_0<y-y_0<y_0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} 0<x<2x_0 \\ 0<y<2y_0. \end{array}$$

Συνεπώς στο $B((x_0,y_0),\varepsilon)$ η συνάρτηση f είναι σταθερή.

Άρα για κάθε ακολουθία με $(\bar{x}_\nu,\bar{y}_\nu)\to(\bar{x}_0,\bar{y}_0)$

$\exists \nu_0 \ \forall \nu\geq\nu_0 : (\bar{x}_\nu,\bar{y}_\nu)\in B((x_0,y_0),\varepsilon) \Rightarrow f(x_\nu,y_\nu)=1, \forall \nu\geq\nu_0$

Συνεπώς $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=1$